名古屋創　共形場理論とPainlevé方程式 1/4

黒木玄記

2018-05-08

1-1

予定 • Virasoro algebra, Vertex operators, Conformal blocks

• 超幾何函数の接続問題

• Conformal block の Fourier変換で P_{VI} の τ 函数が表示できること.

Virasoro代数

Virasoro代数とは次で定まるLie環:

$$\mathrm{Vir} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_m \oplus \mathbb{C}c, \quad [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\, c\,\frac{m^3-m}{12}, \quad [L_m, c] = 0.$$

cは複素数として作用していると以下では考える. $c\in\mathbb{C}$は固定.

Virの Verma加群 M_Δ $(\Delta\in\mathbb{C})$ は $|\Delta\rangle \in M_\Delta$, $|\Delta\rangle \neq 0$ から生成される Virの左表現で以下の条件をみたすもの:

$$L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle, \quad L_m|\Delta\rangle = 0 \ (m>0), \quad M_\Delta = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{i_1\geq\cdots\geq i_k>0} \mathbb{C}L_{-i_1}\cdots L_{-i_k}|\Delta\rangle.$$

Virの右Verma加群 M_Δ^* は $\langle\Delta| \in M_\Delta^*$, $\langle\Delta|\neq 0$ から生成される Virの右表現で以下の条件をみたすもの:

$$\langle\Delta|L_0 = \langle\Delta|\Delta, \quad \langle\Delta|L_m = 0 \ (m<0), \quad M_\Delta^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{i_1\geq\cdots\geq i_k>0} \mathbb{C}\langle\Delta|L_{i_k}\cdots L_{i_1}.$$

Pairing $M_\Delta^* \times M_\Delta \to \mathbb{C}$ が次の条件で一意に定まる:

$$\langle\Delta|\Delta\rangle = 1, \quad \langle u|L_m\cdot|v\rangle = \langle u|\cdot L_m|v\rangle \quad (u\in M_\Delta^*,\ v\in M_\Delta).$$

Def. Vertex operator $\Phi_{\Delta_3,\Delta_1}^{\Delta_2}(z): M_{\Delta_1} \to M_{\Delta_3}$ を次で定める:

① $$[L_m, \Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z)] = z^m\left(z\frac{\partial}{\partial z} + (m+1)\Delta_2\right)\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z),$$

② $$\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z)|\Delta\rangle = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} z^n v_n.$$ ただし, $v_0 = |\Delta\rangle$, $v_n \in M_{\Delta_3}$.

後で色々細部をつめる. □

$\boxed{\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z) \text{の性質}}$　$u \in M_{\Delta_1}$ に対して,

$$\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z) L_n u = \left[\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z), L_n\right] u + L_n \Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z) u$$
$$\overset{①}{=} -z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)\Delta_2\right)\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z) u + L_n \Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z) u.$$

ゆえに $u = |\Delta_1\rangle$ に対して, $\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z)|\Delta_1\rangle$ から $\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z)$ が決まる.

$n \geqq 0$ のとき, $L_n|\Delta\rangle = \delta_{n,0}\Delta|\Delta\rangle$ より,

$$[L_n, \Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z)]|\Delta_1\rangle = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} z^k (L_n - \delta_{n,0}\Delta_1) v_k$$
$$\parallel$$
$$z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)\Delta_2\right)\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z)|\Delta_1\rangle = z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)\Delta_2\right)\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+\alpha} v_k,$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+\alpha+n}(k+\alpha+(n+1)\Delta_2) v_k = z^\alpha \sum_{k=n}^{\infty} z^k (\alpha + k - n + (n+1)\Delta_2) v_{k-n}$$

ゆえに, $n \geqq 0$ について, $v_k = 0\ (k<0)$ とおくと,

$$L_n v_k = (\alpha + k - n + (n+1)\Delta_2 + \delta_{n0}\Delta_1) v_{k-n}.$$

$k=0, n=0$ のとき, $v_0 = |\Delta_3\rangle$ より,

$$\Delta_3 v_0 = L_0 v_0 = (\alpha + \Delta_2 + \Delta_1) v_0, \quad \therefore\ \alpha = \Delta_3 - \Delta_2 - \Delta_1.$$

$k \neq 0, n=0$ のとき,

$$L_0 v_k = (\Delta_3 + k) v_k, \quad \therefore\ v_k \in M_{\Delta_3}^{(k)} := \{v \in M_{\Delta_3} \mid L_0 v = (\Delta_3 + k) v\},$$

$\boxed{\text{Prop.}}$ ・ $M_{\Delta_3} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{\Delta_3}^{(k)}$.

・ $M_{\Delta_3}^{(k)}$ の基底として, $\{L_{-i_1}\cdots L_{-i_r}|\Delta_3\rangle \mid i_1 \geqq \cdots \geqq i_r > 0,\ i_1 + \cdots + i_r = k\}$ がとれる.

$\boxed{\text{記号}}$　$L_{-\lambda} = L_{-\lambda_1}\cdots L_{-\lambda_\ell}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$, $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$: partition

上の Prop. より,

$$v_k = \sum_{|\lambda|=k} c_\lambda L_{-\lambda}|\Delta_3\rangle$$

と書ける.

そのとき,

$$\left[\langle\Delta_3|L_\mu v_k\right]_{|\mu|=k} = \left[\langle\Delta_3|L_\mu L_{-\lambda}|\Delta_3\rangle\right]_{|\lambda|=|\mu|=k}\left[C_\lambda\right]_{|\lambda|=k}.$$

$v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ で $L_\mu v_k$ が書けていれば

$$\det\left[\langle\Delta_3|L_\mu L_{-\lambda}|\Delta_3\rangle\right]_{|\lambda|=|\mu|\neq 0} \neq 0$$

for any k

(この条件は Verma 加群は既約であることと同じ)

となるとき, C_λ $(|\lambda|=k)$ は一意的に決まる.

$\boxed{\text{Prop.}}$ M_{Δ_3} が既約ならば $\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z) : M_{\Delta_1} \to M_{\Delta_3}$ は一意的に決まる. □

$\boxed{\text{Report 問題}}$ 上の prop. を示せ. □

$\boxed{v_1 \text{ を求める.}}$ $v_1 = c_1 L_{-1}|\Delta_3\rangle$ とおける. このとき,

$L_1 v_1 = (\Delta_3+\Delta_2-\Delta_1)|\Delta_3\rangle$ と $L_1 v_1 = c_1 L_1 L_{-1}|\Delta_3\rangle = 2c_1\Delta_3|\Delta_3\rangle$ より,

$$c_1 = \frac{\Delta_3+\Delta_2-\Delta_1}{2\Delta_3}.$$

$\boxed{\text{Conformal block}}$ 以下, c は generic とする. $c=1$ でもよい.

M_0 は既約でないので, $V_0 := M_0/U(Vir)L_{-1}|0\rangle$ とおく.

V_0 は c が generic ($c=1$ でもよい) のとき, 既約になる. (minimal model でないケース)

$V_0^* := M_0^*/\langle 0|L_1 U(Vir)$ とおく.

以下, $|0\rangle$ は V_0 のベクトルであるし, $\langle 0|$ は V_0^* のベクトルであるとする.

$\boxed{\text{Prop.}}$ $\Phi^{\Delta_0}_{\Delta_0,0}(z_0)|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{-1}^n}{n!}|\Delta_0\rangle z_0^n$

証明 $L_{-1}|0\rangle = 0$ より，$L_{-1} v_k = (k+1) v_{k+1}$. □

$\boxed{\text{Def.}}$ vertex operator $\Phi^{*\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z) : M^*_{\Delta_3} \to M^*_{\Delta_1}$ を以下の条件で定める：

キヤクと仮定

① $[L_n, \Phi^{*\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z)] = z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)\Delta_2\right)\Phi^{*\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z)$,

② $\langle\Delta_3|\Phi^{*\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z) = z^{\Delta_3-\Delta_2-\Delta_1}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} v_k$. □

$\boxed{\text{Prop.}}$ $\langle 0|\Phi^{*\Delta_\infty}_{0,\Delta_\infty}(z_\infty) = z_\infty^{-2\Delta_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\langle\Delta_\infty|\frac{L_1^n}{n!} z_\infty^{-n}$. □

ゆえに，$\lim_{z_0\to 0}\Phi^{\Delta_0}_{\Delta_0,0}(z_0)|0\rangle = |\Delta_0\rangle$, $\lim_{z_\infty\to\infty} z_\infty^{2\Delta_\infty}\langle 0|\Phi^{*\Delta_\infty}_{0,\Delta_\infty}(z_\infty) = \langle\Delta_\infty|$.

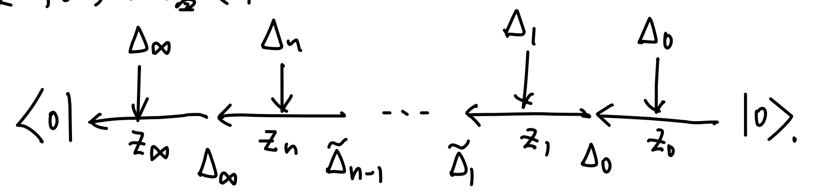
$\boxed{\text{準備}}$ 以下の vertex operators を用意する．

$$V_0^* \xleftarrow{\Phi^{\Delta_\infty}_{0,\Delta_\infty}(z_\infty)} M_{\Delta_\infty} \xleftarrow{\Phi^{\Delta_n}_{\Delta_\infty,\tilde\Delta_{n-1}}(z_n)} M_{\tilde\Delta_{n-1}} \longleftarrow \cdots \longleftarrow M_{\tilde\Delta_1} \xleftarrow{\Phi^{\Delta_1}_{\tilde\Delta_1\Delta_0}(z_1)} M_{\Delta_0} \xleftarrow{\Phi^{\Delta_0}_{\Delta_0,0}(z_0)} V_0$$

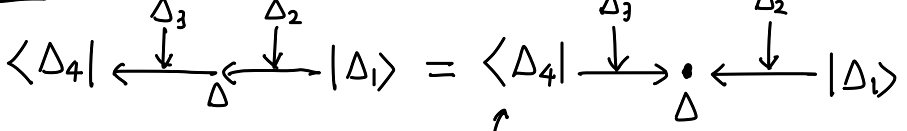
$\boxed{\text{共形ブロックの定義}}$

$$\langle 0|\Phi^{\Delta_\infty}_{0,\Delta_\infty}(z_\infty)\Phi^{\Delta_n}_{\Delta_\infty,\tilde\Delta_{n-1}}(z_n)\cdots\Phi^{\Delta_1}_{\tilde\Delta_1,\Delta_0}(z_1)\Phi^{\Delta_0}_{\Delta_0,0}(z_0)|0\rangle.$$

これを次のように書く：



$\boxed{\text{Prop.}}$ Φ^* を  と書くと，



□

こちらの方がコンピューターで計算しやすい．

3点共形ブロック

$v_0 = |\Delta_3\rangle$ のみが生きのこる

$$\langle \Delta_3 | \Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3 \Delta_1}(z) | \Delta_1 \rangle = \langle \Delta_3 | z^{\Delta_3 - \Delta_2 - \Delta_1} \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n = z^{\Delta_3 - \Delta_2 - \Delta_1},$$

4点で1点が特別な場合

以下, $c=1$ とする.

特別な条件:

$c \neq 1$ ならここに係数が入る.

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3 \Delta_1}(z) - {}^{\circ}_{\circ} T(z) \Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3 \Delta_1}(z) {}^{\circ}_{\circ} = 0, \quad \leftarrow \text{この条件を仮定する.} \leftarrow (☆)$$

ここで $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n$, ${}^{\circ}_{\circ} T(z) \Phi(z) {}^{\circ}_{\circ} := \sum_{n \leq -2} z^{-n-2} L_n \Phi(z) - \Phi(z) \sum_{n \geq -1} z^{-n-2} L_n$.

Rem. $c=1$ のとき, $(L_{-1}^2 - L_{-2})|\frac{1}{4}\rangle$ は $M_{\frac{1}{4}}$ の singular vector になる.
上の特別な条件は (singular vetor) $=0$ という条件に対応している.
$\Phi(z)$ への L_{-1} の作用は $\frac{\partial}{\partial z}$ で, L_{-2} の作用は ${}^{\circ}_{\circ} T(z) \Phi(z) {}^{\circ}_{\circ}$ になっている. □

Prop. 上の特別な条件 (☆) をみたす $\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3 \Delta_1}(z)$ は

$$\Delta_1 = \theta_1^2, \quad \Delta_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \Delta_3 = \left(\theta_1 \pm \frac{1}{2}\right)^2$$

のとき存在する. □

sl_2-invariance $m = 0, \pm 1$ のとき $\langle 0 | L_m = 0$, $L_m |0\rangle = 0$ より

$$0 = \langle 0 | \left[L_m, \Phi^{\Delta_\infty}_{0, \Delta_\infty}(z_\infty) \cdots \Phi^{\Delta_0}_{\Delta_0, 0}(z_0) \right] | 0 \rangle \quad \leftarrow z_{n+1} := z_\infty, \ \Delta_{n+1} := \Delta_\infty$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} z_i^m \left(z \frac{\partial}{\partial z_i} + (m+1) \Delta_i \right) \langle 0 | \Phi^{\Delta_\infty}_{0, \Delta_\infty}(z_\infty) \cdots \Phi^{\Delta_0}_{\Delta_0, 0}(z_0) | 0 \rangle. \quad □$$

さらに, $\varepsilon = \pm 1$ のとき

$$0 = \langle 0 | \Phi^{\theta_4^2}_{0, \theta_4^2}(z_4) \Phi^{\theta_3^2}_{\theta_4^2, (\theta_1 + \frac{\varepsilon}{2})^2}(z_3) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 \Phi^{(\frac{1}{2})^2}_{(\theta_1 + \frac{\varepsilon}{2})^2, \theta_1^2}(z_2) - {}^{\circ}_{\circ} T(z_2) \Phi^{(\frac{1}{2})^2}_{(\theta_1 + \frac{\varepsilon}{2})^2, \theta_1^2}(z_2) {}^{\circ}_{\circ} \right\} \Phi^{\theta_1^2}_{\theta_1^2, 0}(z_1) | 0 \rangle,$$

これより, $Y = \langle 0 | \Phi^{\theta_4^2}_{0, \theta_4^2}(z_4) \cdots \Phi^{\theta_1^2}_{\theta_1^2, 0} | 0 \rangle$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 Y = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{4} \left[\frac{\theta_i^2}{(z_2 - z_i)^2} + \frac{1}{z_2 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right] Y$$

をみたしている.

以上の $\Upsilon = \langle 0|\Phi_{0,\theta_4^2}^{\theta_4^2}(z_4)\cdots\Phi_{\theta_1^2,0}^{\theta_1^2}(z_1)|0\rangle$ に関する4つの式 $\left(\theta_2 = \frac{1}{2}\right)$

$$\sum_{i=1}^{4} z_i^m \left(z\frac{\partial}{\partial z_i} + (m+1)\theta_i^2\right)\Upsilon = 0 \qquad (m=0,\pm 1),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 \Upsilon = \sum_{i\neq 2}\left[\frac{\theta_i^2}{(z_2-z_i)^2} + \frac{1}{z_2-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right]\Upsilon$$

から，$\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}$ を消去すると，z_2 に関する Gauss の超幾何微分方程式を得る．

$z_4\to\infty,\ z_1\to 0,\ z_3\to 1$ としたとき，$\Upsilon = z_2^{\pm\theta_1}\,{}_2F_1(*, z_2)$.

$\boxed{\text{Rem.}}$ $\mathbb{C}L_{-1}\oplus\mathbb{C}L_0\oplus\mathbb{C}L_1$ は Vir の Lie subalgebra で sl_2 に同型． □

この sl_2 上で M_Δ, $\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z)$ について考えてみる． ← $\boxed{\text{Toy model!}}$

$$\Phi_{\Delta_3\Delta_1}^{\Delta_2}(z)|\Delta_1\rangle = z^{\Delta_3-\Delta_2-\Delta_1}\sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k, \qquad v_0 = |\Delta_3\rangle$$

として，v_k を計算してみる．今は sl_2 上で考えているので，

$$v_n = c_n L_{-1}^n|\Delta_3\rangle, \qquad v_{n-1} = c_{n-1}L_{-1}^{n-1}|\Delta_3\rangle$$

と表され，

$$L_1 v_n = (\Delta_3+\Delta_2-\Delta_1+n-1)\,v_{n-1}$$

をみたす．

$$\underbrace{L_1 L_{-1}^n|\Delta_3\rangle}_{\frac{1}{c_n}v_n} = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{L_{-1}\cdots L_{-1}}^{j-1\text{個}}\,\underbrace{2L_0}_{j\text{番目}}\,\overbrace{L_{-1}\cdots L_{-1}}^{n-j\text{個}}|\Delta_3\rangle$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n}(\Delta_3+n-j)L_{-1}^{n-1}|\Delta_3\rangle = n(2\Delta_3+n-1)\overbrace{L_{-1}^{n-1}|\Delta_3\rangle}^{\frac{1}{c_{n-1}}v_{n-1}},$$

ゆえに，

$$c_n = \frac{\Delta_3+\Delta_2-\Delta_1+n-1}{n(2\Delta_3+n-1)}c_{n-1} = \cdots = \frac{(\Delta_3+\Delta_2-\Delta_1)_n}{n!\,(2\Delta_3)_n}.$$

ただし，$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$.

同様にして次が成立することもわかる．

$$\langle\Delta_5|\Phi_{\Delta_5\Delta_3}^{*\Delta_4}(w) = w^{\Delta_5-\Delta_4-\Delta_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\Delta_3+\Delta_4-\Delta_5)_n}{n!\,(2\Delta_3)_n}\langle\Delta_3|L_1^n w^{-n}.$$

したがって,

$$\langle\Delta_5| \overset{\Delta_4}{\underset{w}{\xrightarrow{\ \downarrow\ }}} \underset{\Delta_3}{\bullet} \overset{\Delta_2}{\underset{z}{\xleftarrow{\ \downarrow\ }}} |\Delta_1\rangle = w^{\Delta_5-\Delta_4-\Delta_3} z^{\Delta_3-\Delta_2-\Delta_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta_3+\Delta_4-\Delta_5)_n(\Delta_3+\Delta_2-\Delta_1)_n}{n!\,(2\Delta_3)_n}\left(\frac{z}{w}\right)^n$$
$$= {}_2F_1\left(\begin{matrix}\Delta_3+\Delta_4-\Delta_5,\ \Delta_3+\Delta_2-\Delta_1\\ 2\Delta_3\end{matrix};\frac{z}{w}\right).$$

以上のように, sl_2 のみの toy model ではこのように Gauss の超幾何が出て来る.

$\boxed{\text{Report}}$ Vir の場合に

$$\lim_{c\to\infty}\langle\Delta_5| \overset{\Delta_4}{\underset{1}{\xrightarrow{\ \downarrow\ }}} \underset{\Delta_3}{\bullet} \overset{\Delta_2}{\underset{t}{\xleftarrow{\ \downarrow\ }}} |\Delta_1\rangle = t^{\Delta_3-\Delta_2-\Delta_1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\Delta_3+\Delta_4-\Delta_5,\ \Delta_3+\Delta_2-\Delta_1\\ 2\Delta_3\end{matrix};t\right).$$

$c\to\infty$ は古典極限

Vir の4点共形ブロックの古典極限は Gauss の超幾何になる

□

$\boxed{\text{Heisenberg alg.}}$ Heisenberg algebra $\mathcal{H}$ を次のように定める:

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}a_n \oplus \mathbb{C}q \oplus \mathbb{C}1,\quad [a_m,a_n]=m\,\delta_{m+n,0},\quad [a_0,q]=1,\quad 1\in \text{center}.$$

このとき,

$$L_n = \frac{1}{2}\,{:}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{m-n}a_m{:}\ ,\quad {:}a_k a_m{:} = \begin{cases} a_k a_m & (m\geq 0)\\ a_m a_k & (m<0)\end{cases}$$

とおくと,

$$[L_m,L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}.$$

この式は次の Fock space への作用として成立している

$$\mathcal{F}_\lambda := e^{\lambda q}\,\mathbb{C}[x_1,x_2,\dots] \quad : \text{Fock space (Fock module)}$$

$\mathcal{H}$ は $\mathcal{F}_\lambda$ に次のように作用する:

$$a_m \mapsto \frac{\partial}{\partial x_m}\ (m>0),\quad a_0\mapsto\frac{\partial}{\partial q},\quad a_m\mapsto m x_m\ (m>0),\quad 1\mapsto 1.$$

このとき,

$$L_0 e^{\lambda q} = \frac{\lambda^2}{2}e^{\lambda q},\qquad L_m e^{\lambda q} = 0\ (m>0).$$

$\varphi(z)$ を次のように定める：

$$\varphi(z) = q + a_0 \log z + \sum_{n \neq 0} \frac{z^{-n}}{-n} a_n.$$

このとき, $m \geqq 0$ の a_m を右によせる積を $:\ :$ と書くと,

$$:e^{\alpha\varphi(z)}: = e^{\alpha\sum_{n<0}\frac{z^{-n}}{-n}a_n}\, e^{\alpha q}\, z^{\alpha a_0}\, e^{\alpha\sum_{n>0}\frac{z^{-n}}{-n}a_n}.$$

$e^{\alpha q}$ を $\mathcal{F}_\lambda$ の元に作用させると $\mathcal{F}_{\lambda+\alpha}$ の元が得られる. $e^{\alpha q} e^{\lambda q} = e^{(\lambda+\alpha) q}$.

次が得られる：

$$[L_n, :e^{\alpha\varphi(z)}:] = z^n\left(z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)\frac{\alpha^2}{2}\right):e^{\alpha\varphi(z)}:.$$

ゆえに,

$$:e^{\sqrt{2}\alpha\varphi(z)}: = \Phi^{\alpha^2}_{(\alpha+\beta)^2, \beta^2}(z) : M_{\beta^2} \longrightarrow M_{(\alpha+\beta)^2}.$$

M_{β^2}, $M_{(\alpha+\beta)^2}$ が既約なら

$M_{\beta^2} = \mathcal{F}_{\sqrt{2}\beta}$, $M_{(\alpha+\beta)^2} = \mathcal{F}_{\sqrt{2}(\alpha+\beta)}$

さらに, 次も成立している.

$\boxed{\text{Prop.}}$ $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 :e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(z)}: - :T(z)e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(z)}: = 0.$ □

$\boxed{\text{Report}}$ これを示せ. □